

Mô hình động lực tay máy hai khâu rắn – đàn hồi

1. Giới thiệu

Ngày nay cùng với sự phát triển của khoa học công nghệ sau cuộc cách mạng công nghiệp 4.0, các cơ cấu robot được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực như công nghiệp, dịch vụ, y tế, hàng không vũ trụ vv... Có rất nhiều dây chuyền sản xuất đã sử dụng tự động hóa trên robot hoàn toàn. Các tay máy robot có rất nhiều ưu điểm vượt trội đó là khả năng thực hiện công việc với độ chính xác cao, mang tải trọng lớn, quán tính thấp, độ linh hoạt khi di chuyển và lắp đặt. Các mô hình tay máy truyền thống thường bỏ qua các biến dạng trong các khâu của tay máy, tuy nhiên đối với các tay máy dài có thiết diện nhỏ lại mang tải trọng lớn thì các biến dạng đàn hồi là không thể bỏ qua. Biến dạng này làm ảnh hưởng lớn đến việc vận hành chính xác của tay máy vì vậy chúng ta cần phải thiết lập lại mô hình động lực chính xác hơn cho tay máy như vậy. Báo cáo này trình bày việc thiết lập mô hình động lực cho tay máy hai khâu rắn - đàn hồi.

2. Cơ sở toán học

Khâu đàn hồi của tay máy là một hệ vô hạn bậc tự do, ta sử dụng mô hình dầm Euler - Bernoulli để mô tả các khâu đàn hồi đó.

Hệ tay máy là hệ nhiều vật, từ đó ta dùng phương pháp hệ quy chiếu động để xác định tọa độ của các phần tử.

Biểu diễn chuyển vị do biến dạng đàn hồi bằng phương pháp Ritz – Galerkin.

Sử dụng phương trình Lagrange loại 2 để đưa ra mô hình động lực cho hệ tay máy.

3. Mô hình động lực

Xét một chuyển động trong mặt phẳng ngang của cơ cấu hai khâu rắn – đàn hồi như hình (1). Trong đó khâu rắn được coi là đồng nhất. Khâu đàn hồi được coi là gắn chặt vào khâu rắn và giả sử là mảnh, đồng chất và thỏa mãn lý thuyết dầm Euler – Bernoulli với ảnh hưởng quán tính quay và lực cắt nhỏ.

Ma trận chuyển giữa các hệ tọa độ có dạng:

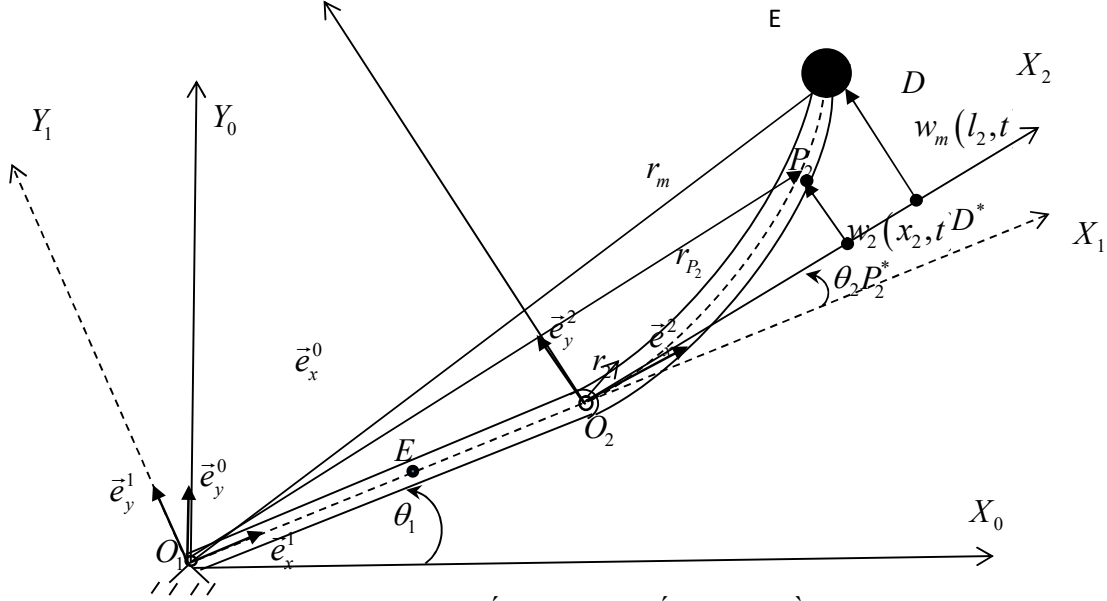
$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^1 \\ \vec{e}_y^1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^1 \\ \vec{e}_y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^1 \\ \vec{e}_y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^2 \\ \vec{e}_y^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^2 \\ \vec{e}_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^1 \\ \vec{e}_y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ -\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 & -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4}$$



Hình 1: Cơ cấu hai khâu rắn – đàn hồi

3.1 Động năng của hệ

Động năng của hệ bằng tổng động năng của các vật thuộc hệ

$$T = T_1 + T_2 + T_E \tag{5}$$

Trong đó:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{I_z} \dot{\theta}_1^2 \tag{6}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 A_2 \dot{r}_{P_2}^2 dx_2 \tag{7}$$

$$T_E = \frac{1}{2} m_E v_E^2 = \frac{1}{2} m_E \dot{r}_E^2 \tag{8}$$

Véc tơ định vị của điểm P_1 trên khâu 1:

$$\vec{r}_{P_1} = (x_1) \vec{e}_x^1 = (x_1) \cos \theta_1 \vec{e}_x^0 + (x_1) \sin \theta_1 \vec{e}_y^0 \tag{9}$$

Véc tơ định vị của điểm O_2 Cuối khâu 1:

$$\vec{O_1 O_2} = l_1 \vec{e}_x^1 = l_1 \cos \theta_1 \vec{e}_x^0 + l_1 \sin \theta_1 \vec{e}_y^0 \tag{10}$$

Ta có các véc tơ

$$\vec{O_2 P_2}^* = x_2 \vec{e}_x^2 = x_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_x^0 + x_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_y^0 \tag{11}$$

$$\overrightarrow{P_2^* P_2} = w(x_2, t) \vec{e}_y^2 = -w \sin(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_x^0 + w \cos(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_y^0 \quad (12)$$

Véc tơ định vị của điểm P_2 trên khâu 2:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{P_2} &= \overrightarrow{O_1 O_2} + \overrightarrow{O_2 P_2^*} + \overrightarrow{P_2^* P_2} \\ &= l_1 \cos \theta_1 \vec{e}_x^0 + l_1 \sin \theta_1 \vec{e}_y^0 + x_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_x^0 + x_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_y^0 \\ &\quad - w(x_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_x^0 + w(x_2, t) \cos(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_y^0 \\ \vec{r}_{P_2} &= [l_1 \cos \theta_1 + x_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - w(x_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2)] \vec{e}_x^0 \\ &\quad + [l_1 \sin \theta_1 + x_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + w(x_2, t) \cos(\theta_1 + \theta_2)] \vec{e}_y^0 \end{aligned} \quad (13)$$

Đạo hàm lên ta được:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{P_2} &= [-\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) x_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) w \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad - \dot{w}(x_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2)] \vec{e}_x^0 + [\dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) x_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ &\quad + -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) w(x_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2) + \dot{w}(x_2, t) \cos(\theta_1 + \theta_2)] \vec{e}_y^0 \end{aligned} \quad (14)$$

Vị trí của khối lượng E trên khâu 2

$$\begin{aligned} \vec{r}_E &= l_1 \cos \theta_1 \vec{e}_x^0 + l_1 \sin \theta_1 \vec{e}_y^0 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_x^0 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_y^0 \\ &\quad - w(l_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_x^0 + w(l_2, t) \cos(\theta_1 + \theta_2) \vec{e}_y^0 \\ \vec{r}_m &= [l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - w(l_2, t) \sin(\theta_1 + \theta_2)] \vec{e}_x^0 \\ &\quad + [l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + w(l_2, t) \cos(\theta_1 + \theta_2)] \vec{e}_y^0 \end{aligned} \quad (15)$$

Đạo hàm lên ta được:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_m &= [-\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta}_2 l_2 \sin \theta - w(l_2, t) \dot{\theta} \cos \theta - \dot{w}(l_2, t) \sin \theta] \vec{e}_x^0 \\ &\quad + [\dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos \theta - w(l_2, t) \dot{\theta} \sin \theta + \dot{w}(l_2, t) \cos \theta] \vec{e}_y^0 \end{aligned} \quad (16)$$

Động năng của thanh 2

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \rho_2 A_2 \dot{r}_{P_2}^2 dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \rho_2 A_2 \int_0^{l_2} \left\{ \left[-\dot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 - \dot{\theta} x_2 \sin \theta - \dot{\theta} w \cos \theta - \dot{w} \sin \theta \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\dot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 + \dot{\theta} x_2 \cos \theta - \dot{\theta} w \sin \theta + \dot{w} \cos \theta \right]^2 \right\} dx_2 \\ &= \frac{1}{2} \rho_2 A_2 \int_0^{l_2} \left\{ 2\dot{\theta}_1^2 l_1 x_2 \cos(\theta_2) - 2\dot{q}_1^2 w l_1 \sin(\theta_2) + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_1^2 x_2^2 + \dot{\theta}_1^2 w^2 \right. \\ &\quad \left. + \dot{\theta}_2^2 x_2^2 + \dot{\theta}_2^2 w^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 x_2^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 w^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{w} x_2 + 2\dot{\theta}_2 \dot{w} x_2 \right. \\ &\quad \left. + \dot{\theta}_1 \dot{w} l_1 \cos(\theta_2) + \dot{w}^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 x_2 \cos(\theta_2) - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 w l_1 \sin(\theta_2) \right\} dx_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Vậy động năng toàn hệ

$$\begin{aligned}
T = & \left[\frac{J_{I_z}}{2} + m_E \left[l_1 l_2 \cos \theta_2 - w(l_2, t) l_1 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} w^2(l_2, t) + \frac{1}{2} l_1^2 + \frac{1}{2} l_2^2 \right] \right] \dot{\theta}_1^2 \\
& + \frac{1}{2} m_E (l_2^2 + w^2(l_2, t)) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_E (2 \cos(\theta_2) \dot{w}(l_2, t) l_1 + 2 \dot{w}(l_2, t) l_2) \dot{\theta}_1 \\
& + \frac{1}{2} m_E (2 \cos(\theta_2) l_1 l_2 - 2 \sin(\theta_2) w(l_2, t) l_1 + 2 w^2(l_2, t) + 2 l_2^2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\
& + m_E \dot{w}(l_2, t) l_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_E \dot{w}^2(l_2, t) + \frac{1}{2} \rho_2 A_2 \int_0^{l_2} \{ 2 \dot{\theta}_1^2 l_1 x_2 \cos(\theta_2) + \dot{\theta}_1^2 w^2 \\
& - 2 \dot{q}_1^2 w l_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1^2 l_1^2 + \dot{\theta}_1^2 x_2^2 + \dot{\theta}_2^2 x_2^2 + \dot{\theta}_2^2 w^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 x_2^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 w^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{w} x_2 \\
& + 2 \dot{\theta}_2 \dot{w} x_2 + \dot{\theta}_1 \dot{w} l_1 \cos(\theta_2) + \dot{w}^2 + 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 x_2 \cos(\theta_2) - 2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 w l_1 \sin(\theta_2) \} dx_2
\end{aligned} \tag{18}$$

3.2 Thế năng của cơ hệ

Theo lý thuyết dầm Euler – Bernoulli ta có thế năng đàn hồi của thanh CD cho bởi công thức

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} E_2 I_2 (w_2'')^2 dx_2 \tag{19}$$

3.3 Rời rạc hóa thanh đàn hồi

Sử dụng phương pháp Riz - Galerkin tìm dao động uốn của khâu dưới dạng:

$$w(x_2, t) = \sum_{i=1}^N X_i(x) q_i(t) \tag{20}$$

$$w(l_2, t) = \sum_{i=1}^N X_i(l_2) q_i(t) \tag{21}$$

Trong đó $X_i(x)$ là các dạng riêng của dầm Euler – Bernoulli một đầu ngàm một đầu tự do, nó có dạng:

$$X_i(x) = \cosh \frac{\lambda_i x_2}{l_2} - \cos \frac{\lambda_i x_2}{l_2} - \frac{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i} \left(\sinh \frac{\lambda_i x_2}{l_2} - \sin \frac{\lambda_i x_2}{l_2} \right) \tag{22}$$

$$X_i(l_2, t) = \cosh \lambda_i - \cos \lambda_i - \frac{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i} (\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i) \tag{23}$$

Với λ_i là nghiệm của phương trình

$$\cosh \lambda_i \cdot \cos \lambda_i + 1 = 0 \tag{24}$$

Ta có:

$$w(x_2, t) = \sum_{i=1}^N \left[\cosh \frac{\lambda_i x_2}{l_2} - \cos \frac{\lambda_i x_2}{l_2} - a_i \left(\sinh \frac{\lambda_i x_2}{l_2} - \sin \frac{\lambda_i x_2}{l_2} \right) \right] q_i(t) \tag{25}$$

$$w^2(x_2, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i(x) X_j(x) q_i(t) q_j(t) \tag{26}$$

$$w_m^2(l_2, t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i(l_2) X_j(l_2) q_i q_j \tag{27}$$

$$\text{Với } a_i = \frac{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i} \quad (28)$$

Gọi s là tọa độ suy rộng đủ của hệ ta có

$$s = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_N]^T \quad (29)$$

Phương trình Lagrange loại II cho cơ hệ:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial s_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial s_k} + Q_k^* \text{ với } k=1,2, \dots, 2+N \quad (30)$$

Với trường hợp chỉ sử dụng một hàm riêng thứ nhất trong khai triển Ritz – Galerkin ta được hệ ba phương trình vi phân đạo hàm riêng mô tả chuyển động của tay máy hai khâu rần đàn hồi:

$$\begin{aligned} M_1 = & \left[(0.765367m_E - 0.025845m_2)l_1q_1 \sin(\theta_2) + (2m_El_2 + m_2l_2)l_1 \cos \theta_2 \right. \\ & \left. + (0.146447m_E + 0.53001m_2)q_1^2 + (m_E + m_2)l_1^2 + J_{1z} + m_El_2^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 \right] \ddot{\theta}_1 \\ & + \left[(0.38268m_E - 0.012923m_2)l_1q_1 \sin \theta_2 + (m_El_2 + \frac{1}{2}m_2l_2)l_1 \cos \theta_2 \right. \\ & \left. + (0.146447m_E + 0.53001m_2)q_1^2 + m_El_2^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 \right] \ddot{\theta}_2 \\ & \left[(-0.38268m_E + 0.012923m_2)l_1 \cos(\theta_2) - 0.38268m_El_2 \right. \\ & \left. - 0.167872m_2l_2 \right] \ddot{q}_1 + h_1 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} M_2 = & \left[[m_El_1l_2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2] \cos \theta_2 + (0.38268m_El_1 - 0.01292m_2l_1)q_1 \sin(\theta_2) \right. \\ & \left. + (0.146447m_E + 0.53001m_2)q_1^2 + m_El_2^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 \right] \ddot{\theta}_1 \\ & + \left[(0.146447m_E + 0.53001m_2)q_1^2 + m_El_2^2 + \frac{1}{3}m_2l_2^2 \right] \ddot{\theta}_2 \\ & + (-0.38268m_El_2 - 0.16787m_2l_2) \ddot{q}_1 + h_2 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \left[(-0.38268m_El_1 + 0.012923m_2l_1) \cos(\theta_2) - 0.38268m_El_2 - 0.16787m_2l_2 \right] \ddot{\theta}_1 \\ & + (-0.38268m_El_2 - 0.16787m_2l_2) \ddot{\theta}_2 + (0.146447m_E + 0.53001m_2) \ddot{q}_1 + h_3 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} h_1 = & \left[[(-m_2l_2 - 2m_El_2)l_1 \sin \theta_2 + (0.765367m_E - 0.025845m_2)l_1q_1 \cos \theta_2] \dot{\theta}_2 \right. \\ & \left. + [(0.765367m_E - 0.025845m_2)l_1 \sin \theta_2 + (0.29289m_E + 1.06002m_2)q_1] \dot{q}_1 \right] \dot{\theta}_1 \\ & + \left[[-m_El_2 - \frac{1}{2}m_2l_2]l_1 \sin \theta_2 + (0.38268m_E - 0.012923m_2)l_1q_1 \cos \theta_2 \right] \dot{\theta}_2^2 \\ & + [(0.765367m_E - 0.025845m_2)l_1 \sin \theta_2 + (0.29289m_E + 1.06002m_2)q_1] \dot{\theta}_2 \dot{q}_1 \end{aligned} \quad (34)$$

$$h_2 = \left[(-0.38268m_E l_1 + 0.012923m_2 l_1) q_1 \cos \theta_2 + \left(m_E l_1 l_2 + \frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \right) \sin \theta_2 \right] \dot{\theta}_1^2 + (0.29289m_E + 1.06002m_2) q_1 \dot{q}_1 \dot{\theta} \quad (35)$$

$$h_3 = \left[(-0.38268m_E l_1 + 0.012923m_2 l_1) \sin \theta_2 + (-0.146447m_E - 0.53m_2) q_1 \right] \dot{\theta}_1^2 + (-0.29289m_E - 1.06002m_2) q_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + (-0.146447m_E - 0.53m_2) q_1 \dot{\theta}_2^2 \quad (36)$$

4. Kết luận

Báo cáo này, tác giả trình bày mô hình động lực cho tay máy hai khâu rắn – đàn hồi dựa trên mô hình dầm Euler – Bernoulli và phương pháp Ritz – Galerkin. Hệ phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ có được nhờ phương trình Lagrange loại 2. Mô hình động lực học này là cơ sở quan trọng để giải quyết các bài toán tiếp theo như động lực học thuận, động lực học ngược và điều khiển.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Khang, Động lực học hệ nhiều vật (in lần thứ 2). NXB Khoa học & kỹ thuật, Hà Nội, 2017.
2. Sciavicco, L., Siciliano, B.: Modeling and Control of Robot Manipulators. Springer, Berlin(2000)
3. Balafoutis, C.A.: A survey of efficient computational methods for manipulator inverse dynamics, J Intell. Robot. Syst. 9(1-2), 45-71(1994)
4. Schiehlen, W.: Multibody systems dynamics : Roots and perspectives. Multibody Syst. Dyn. 1(2), 149-188(1997). Doi: 10.1023/A: 1009745432698
5. Masarati, P., Morandini, M., Quaranta, G., Mantegazza, P.: Open- Source multibody analysis software. In: Multibody Dynamics 2003 International Conference on Computational Multibody Dynamic, Lisboa, Portugal, 1-4 July 2003
6. Clavel, R.: Delta, a fast robot with parallel geometry. In: Proceeding of the 18th
7. Stewart, D.: A platform with six degrees – of – freedom. In: Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part I, vol. 180, pp 371-386, 1965-1966
8. Dafaoui, EL- M., Amirat, Y., Pontnau, J., Francois, C. : Analysis and design of a six – dof parallel manipulator, modeling, singular configuration, and workspace. IEEE Trans. Robot. Autom. 14(4), 78-92(1998)